

به نام خدا

ریاضی پیش

۱- فرد بودن تابع مقابل را بررسی کنید. $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$D_f = \{x | \sqrt{x^2 + 1} - x > 0\} = \{x | x < \sqrt{x^2 + 1}\} : \text{حل}$$

شرط $\sqrt{x^2 + 1} > 1$ همواره برقرار است $D_f = 1R$

$$f(-x) = \log(\sqrt{(-x)^2 + 1} - (-x)) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) =$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} &= \frac{x^2 + 1 - x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &= \text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right) = \text{Log}1 - \text{Log}(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= -\text{Log}(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -f(x) \end{aligned}$$

تابع فرد است

۲- به کمک تعریف نشان دهید تابع $f(x) = -\frac{1}{2x}$ برای $x > 0$ اکیداً صعودی است.

حل : فرض کنید

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < 2x_2 &\Rightarrow 0 < 2x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{2x_2} < \frac{1}{2x_1} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2x_1} < -\frac{1}{2x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

۳- اگر $x^2 < \frac{x}{3}$ باشد مقدار $\left[\frac{-x}{5}\right] + \left[\frac{x}{4}\right]$ را به دست آورید.

حل : نا معادله $x^2 < \frac{x}{3}$ را حل کنیم.

$$x^2 < \frac{x}{3} \Rightarrow 3x^2 < x \Rightarrow 3x^2 - x < 0 \Rightarrow x(3x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x < \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$$

حال طرفین را یکبار بر ۴ و یک بار بر ۵- تقسیم می کنیم.

$$0 < \frac{x}{4} < \frac{1}{12} \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 0$$

$$-\frac{1}{15} < -\frac{x}{5} < 0 \Rightarrow \left\lfloor -\frac{x}{5} \right\rfloor = -1 \Rightarrow 0 + (-1) = -1$$

۴- دو تابع $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ b & x < c \end{cases}$ برابرند .
مقدار $a + b + c$ را به دست آورید .

$$1) D_f = D_g$$

$$2) \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x): \text{ حل}$$

$$g(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} = 1 & x > 2 \\ -\frac{(x-2)}{x-2} = -1 & x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > a \\ b & x < c \end{cases} \text{ یا } g(x)$$

برابر است از مقایسه این دو تابع $\Leftarrow$

$$a = 2 \quad c = 2 \quad b = -1 \quad a + b + c = 3$$

۵- تساوی تابع های زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4} \quad g(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^3-4x}$$

حل :

$$D_f = R - \{\pm 2\}$$

$$D_g = R - \{0, \pm 2\}$$

تساوی برقرار نیست *** $D_f \neq D_g$

$$6- \text{ جواب دستگاه نامعادله } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{6} \\ x - \frac{1}{2}x < 2 \end{cases} \text{ را به دست آورید.}$$

حل:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{6} \\ x - \frac{1}{2}x < 2 \\ x - 2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2x > 1 \\ 2x - x < 4 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \\ x < 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ اشتراک می گیریم $1 < x < 3$

۷- اگر A یک ماتریس مربعی باشد که $A^3 - 3I = 0$ وارون ماتریس $A-I$ را بدست آورید.

حل:

$$A^3 - 3I = 0 \Rightarrow A^3 - I - 2I = 0 \Rightarrow A^3 - I = 2I$$

$$\Rightarrow A^3 - I^3 = 2I \Rightarrow (A - I)(A^2 + I + A) = 2I$$

$$\Rightarrow (A - I) \left(\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A \right) = I \Rightarrow$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$$

۸- مطلوب است محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\sin(\sin x)} \times \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

۹- مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} (x + x \sin x)^x$

$$x \rightarrow 0$$

حل :

$$\lim(x + \sin x)^x = (0 + \sin 0)^0 = 0^0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x + \sin x)}{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(x + \sin x)}{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \sin x)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{Hop}{=} e^{\frac{2}{-1}}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$$

۱۰- مشتق زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(x^2 + 1) - 2x \times \sin x}{(x^2 + 1)^2}$$